

ძვირფასო სტუდენტებო,  
 დავალების შესრულების დაწყებამდე,  
 გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 2

**დავალება № 15 არაცხადი ფუნქცია. არაცხადი ფუნქციის წარმოებული. არაცხადი ფუნქციის გამოყენება ბიზნესის ამოცანებში.**

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ, ლექცია 15-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

1- ა,გ	1- ბ,დ,ე	2- ა,დ,თ	2- ბ,გ,ე,კ	3- ა	3- ბ,ე	4- ა,გ	4- ბ,დ	5	6	7	8
9	10										

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა:

1. იპოვეთ  $\frac{dy}{dx}$  ორი გზით:

I. არაცხადი გაწარმოებით;

II. ცხადი სახით მოცემული  $y$  ფუნქციის გაწარმოებით.

შეადარეთ მიღებული შედეგები.

ა)  $2x + 3y = 7$

ამოხსნა: I. განტოლების ორივე მხარე წევრ-წევრად გავაწარმოოთ  $x$ -ით იმის გათვალისწინებით, რომ  $y$  არის  $x$ -ის ფუნქცია:

$$2 + 3 \frac{dy}{dx} = 0, \text{ საიდანაც მივიღებთ, რომ } \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}$$

II. ახლა მოცემული განტოლება ამოვხსნათ  $y$ -ის მიმართ ( ანუ  $y$  ფუნქცია ცხადად ჩავწეროთ) და შემდეგ გავაწარმოოთ:  $y = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}x, \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}$ .

ორივე გზით გაწარმოებამ მოგვცა ერთიდაიგივე შედეგი.

პასუხი: I.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}$ ; II.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}$ .

1-გ.  $x^3 - y^2 = 5$ .

ამოხსნა: I. პირველი ამოცანის ამოხსნის ანალოგიურად, განტოლების ორივე მხარე წევრ-წევრად გავაწარმოთ  $x$  -ით, თან გავითვალისწინოთ, რომ  $y$  არის  $x$  -ის ფუნქცია. ამასთან, გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი:  $3x^2 - 2y \frac{dy}{dx} = 0$ . აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y} \quad (1)$$

II. ახლა მოცემული განტოლება ამოვხსნათ  $y$  -ის მიმართ ( $y$  ფუნქცია ცხადად ჩავწეროთ) და შემდეგ გავაწარმოთ:

$$y = \pm \sqrt{x^3 - 5} \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 5}} \quad (3)$$

თუ (1)-ში  $y$ -ის ნაცვლად შევიტანთ (2)-ს, მივიღებთ (3) -ს.

პასუხი: I.  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$ ; II.  $\frac{dy}{dx} = \pm \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 5}}$ .

2. იპოვეთ  $\frac{dy}{dx}$  არაცხადი გაწარმოების გზით :

ა)  $x^3 + y^3 = xy$

ამოხსნა: განტოლების ორივე მხარე წევრ-წევრად გავაწარმოთ  $x$  -ით, თან გავითვალისწინოთ, რომ  $y$  არის  $x$  -ის ფუნქცია, ხოლო  $xy$  -ის გასაწარმოებლად გამოვიყენოთ ორი ფუნქციის ნამრავლის გაწარმოების წესი:

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = y + x \frac{dy}{dx}, \text{ საიდანაც } \frac{dy}{dx} = \frac{y-3x^2}{3y^2-x}$$

პასუხი:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y-3x^2}{3y^2-x}$ .

2-დ.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

ამოხსნა: განტოლების ორივე მხარე წევრ-წევრად გავაწარმოთ  $x$  -ით,

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \text{ საიდანაც } \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2}.$$

პასუხი:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2}$

2-თ.  $y^2 + 3xy - 4x^2 = 9$

ამოხსნა:  $2y \frac{dy}{dx} + 3y + 3x \frac{dy}{dx} - 8x = 0, \frac{dy}{dx} = \frac{8x-3y}{2y-3x}$ .

პასუხი:  $\frac{dy}{dx} = \frac{8x-3y}{2y-3x}$

3-ა. შეადგინეთ მოცემული წირის მითითებულ წერტილში გავლებული მხები წრფის განტოლება:  $x^2 = y^3, (8; 4)$ .

ამოხსნა: გავაწარმოთ განტოლების ორივე მხარე  $x$  -ით,  $2x = 3y^2 \frac{dy}{dx}$ , საიდანაც  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$ .

მხები წრფის  $m$  დახრა  $(8; 4)$  წერტილში იქნება ფუნქციის წარმოებულის მნიშვნელობის ტოლი,

როცა  $x = 8$ ,  $y = 4$ . მაშასადამე,  $m = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 4^2} = \frac{1}{3}$ . ვინაიდან საძიებელი მხევი წრფე გადის  $(8; 4)$

წერტილზე, ამიტომ მისი განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$y - 4 = \frac{1}{3}(x - 8), \text{ რომლის გამარტივებითაც მიიღება, } y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

პასუხი:  $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

#### 4. იპოვეთ მოცემული წირების ის წერტილები, რომლებზეც გატარებული მხევი წრფეები

I. ჰორიზონტალურია;

II. ვერტიკალურია.

ა)  $x + y^2 = 9$

ამოხსნა: ვიპოვოთ არაცხადი ფუნქციის წარმოებული:  $1 + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ , საიდანაც  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2y}$  (\*)

I. როგორც ცნობილია, ჰორიზონტალური მხევი წრფის დახრა 0-ის ტოლია, ანუ უნდა ვიპოვოთ წერტილი, რომელშიც წარმოებულის მნიშვნელობა 0-ია. ჩვენი ამოცანის პირობებში (\*) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი წილადი არცერთ წერტილში არ ღებულობს 0-ის ტოლ მნიშვნელობას, ანუ არ არსებობს მოცემული წირის ისეთი წერტილი, რომელზეც გავლებული მხევი წრფე ჰორიზონტალურია.

II. ვერტიკალური მხევი წრფის საძიებლად (\*) ტოლობის მარჯვენა მხარეში მდგომი წილადის მნიშვნელი უნდა გავუტოლოთ 0-ს და ამოვხსნათ სისტემა: 
$$\begin{cases} 2y = 0 \\ x + y^2 = 9 \end{cases}$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ  $y = 0$ ,  $x = 9$ , ანუ წირის  $(9; 0)$  წერტილში გავლებული მხევი წრფე ვერტიკალურია.

პასუხი: I. ჰორიზონტალური მხევი არ აქვს;

II.  $x = 9$  არის ვერტიკალური მხევი, გავლებული  $(9; 0)$  წერტილში.

4-გ.  $xy = 16y^2 + x$ .

ამოხსნა: ვიპოვოთ არაცხადი ფუნქციის წარმოებული:  $y + x \frac{dy}{dx} = 32y \frac{dy}{dx} + 1$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{x-32y}$ .

I. ჰორიზონტალური მხევი წრფის საძიებლად ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} 1 - y = 0 \\ xy = 16y^2 + x \end{cases}$$

ამ სისტემას ამონახსნი არ გააჩნია, რაც იმას ნიშნავს, რომ მოცემული წირის არცერთ წერტილში ჰორიზონტალური მხევი არ გაივლის.

II. ვერტიკალური მხევი წრფის საძიებლად ამოვხსნათ სისტემა:

$$\begin{cases} 1 - y \neq 0 \\ x - 32y = 0 \\ xy = 16y^2 + x \end{cases} \begin{cases} y \neq 1 \\ x = 32y \\ 32y^2 = 16y^2 + 32y \end{cases} \begin{cases} y \neq 1 \\ x = 32y \\ y^2 = 2y \end{cases} \begin{cases} y \neq 1 \\ x = 0, x = 64 \\ y = 0, y = 2 \end{cases}$$

ამგვარად,  $x = 0$  და  $x = 64$  ვერტიკალური მხევი წრფეებია, რომლებიც გაივლის, შესაბამისად,  $(0; 0)$  და  $(64; 2)$  წერტილებში.

პასუხი: I. ჰორიზონტალური მხევი არ აქვს; II. ვერტიკალური მხევი აქვს  $(0; 0)$  და  $(64; 2)$  წერტილებში,  $x = 0$  და  $x = 64$  ვერტიკალური მხევიებია.

5. ტბა ბინძურდება მის სანაპიროსთან მდებარე ქარხნის ნარჩენებით. ეკოლოგებმა გამოიკვლიეს, რომ თუ დაბინძურების დონე არის  $x$  ერთეული, მაშინ ტბაში იქნება გარკვეული სახეობის  $F$  რაოდენობის თევზი, სადაც

$$F = \frac{32000}{3 + \sqrt{x}}.$$

იმ შემთხვევაში, როცა ტბაში დარჩება 4000 თევზი, მისი დაბინძურების დონე იზრდება 1,4 ერთეულით წელიწადში. რა სიჩქარით შეიცვლება თევზის პოპულაცია ამ დროს?

ამოხსნა: ჩვენ გვთხოვენ, დროის ამ მომენტში ვიპოვოთ  $\frac{dF}{dt}$  (თევზის პოპულაციის სიჩქარე).

გადავწეროთ  $F$  შემდეგნაირად:  $F = 32000 \cdot (3 + \sqrt{x})^{-1}$  და  $t$  ცვლადით გაწარმოებისას გამოვიყენოთ რთული ფუნქციის გაწარმოების წესი:

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{32000}{(3 + \sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (4)$$

მოცემულობის თანახმად,  $\frac{dx}{dt} = 1,4$ ;  $F = 4000$ . ბოლო მონაცემით ვიპოვოთ  $x$ -ის მნიშვნელობა:

$$4000 = \frac{32000}{3 + \sqrt{x}}, \quad 3 + \sqrt{x} = 8, \quad \sqrt{x} = 5, \quad x = 25.$$

ჩავსვათ  $\frac{dx}{dt} = 1,4$ ;  $F = 4000$ ,  $x = 25$  მონაცემები ფორმულა (4) - ში:

$$\frac{dF}{dt} = -\frac{32000}{(3 + \sqrt{25})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{25}} \cdot 1,4 = -70,$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ თევზის პოპულაცია შემცირდება 70 ერთეულით.

პასუხი: თევზის პოპულაცია შემცირდება 70 ერთეულით.

6. როცა ერთი ცალი პროდუქტი  $p$  ლარი ღირს, მწარმოებელი ბაზარს აწვდის  $x$  ათას ერთეულს, სადაც

$$3p^2 - x^2 = 12.$$

როგორი იქნება მიწოდების ცვლილების სიჩქარე იმ შემთხვევაში, როცა პროდუქტის ფასია 4 ლარი და ის იზრდება 87 თეთრით ყოველთვიურად?

ამოხსნა: ჩვენ უნდა ვიპოვოთ  $\frac{dx}{dt}$  (მიწოდების ცვლილების სიჩქარე), როცა  $\frac{dp}{dt} = 0,87$ ;  $p = 4$ .

ბოლო მონაცემით ვიპოვოთ  $x$ -ის მნიშვნელობა:  $3 \cdot 16 - x^2 = 12$ ,  $x^2 = 36$ ,  $x = 6$ .

ახლა გავაწარმოოთ მოცემული განტოლების ორივე მხარე  $t$  ცვლადით,

$$6p \frac{dp}{dt} - 2x \frac{dx}{dt} = 0 \quad (5)$$

ჩავსვათ  $\frac{dp}{dt} = 0,87$ ;  $p = 4$ ,  $x = 6$  მონაცემები ფორმულა (5) - ში:

$$6 \cdot 4 \cdot 0,87 - 2 \cdot 6 \cdot \frac{dx}{dt} = 0,$$

საიდანაც მიიღება, რომ  $\frac{dx}{dt} = 1,74$  ათას ერთეულს = 1740 ერთეულს.

პასუხი: მიწოდება ყოველთვიურად იზრდება 1740 ერთეულით.

9. ჰერპეტოლოგებმა შემოგვთავაზეს, გამოვიყენოთ  $s = 1.1w^{0.2}$  ფორმულა ხვლიკის მაქსიმალური სპრინტერული  $s$  სიჩქარის (მ/წმ) შესაფასებლად, სადაც  $w$  ხვლიკის მასაა გრამებში. რა სიჩქარით გაიზრდება 11 გრამიანი ხვლიკის მაქსიმალური სიჩქარე, თუ ის მატულობს წონაში ყოველდღიურად 0,02 გრამით?

ამოხსნა: უნდა ვიპოვოთ  $\frac{ds}{dt}$ , როცა  $w = 11$ ,  $\frac{dw}{dt} = 0,02$ .

გავაწარმოთ მოცემული განტოლების ორივე მხარე  $t$  ცვლადით,

$$\frac{ds}{dt} = 1,1 \cdot 0,2 \cdot w^{-0,8} \cdot \frac{dw}{dt}$$

$w = 11$ ,  $\frac{dw}{dt} = 0,02$  მონაცემების გათვალისწინებით

$$\frac{ds}{dt} = \frac{11}{10} \cdot \frac{1}{5} \cdot 11^{-0,8} \cdot 0,02 = \frac{1}{2500} \cdot 11^{0,2} = \frac{1}{2500} \cdot \sqrt[5]{11} \approx \frac{1}{2500} \cdot 1,615 = 0,000646 \approx 0,0006.$$

პასუხი: სიჩქარე გაიზრდება 0,0006 მ/წმ-ით.